Chapitre 3 : Nombres complexes

1 Généralités et rappels

1.1 Définition

Définition 1.1. On définit (provisoirement) l'ensemble des nombres complexes comme

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

On identifie tout réel à un "nombre complexe" $aI_2 = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ et on définit $i = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ de telle sorte que tout nombre complexe s'écrit de manière unique sous la forme $a + ib$, pour un couple $(a, b) \in \mathbb{R}^2$

Proposition 1.2. Soit $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$

* L'addition est <u>commutative</u> : $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$
* L'addition est <u>associative</u> : $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$
* La multiplication est commutative : $z_1 z_2 = z_2 z_1$
* La multiplication est associative : $z_1(z_2 z_3) = (z_1 z_2) z_3$
* La multiplication <u>distribue sur l'addition</u> : $z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$

1.2 Conjugaison

Définition 1.3. Soit $z = a + ib$ un nombre complexe sous forme algébrique.
On définit :

* Son <u>conjugué</u> : $\overline{z} = a - ib \in \mathbb{C}$
* Sa <u>partie réelle</u> : $\mathrm{Re}(z) = a \in \mathbb{R}$
* Sa <u>partie imaginaire</u> : $\mathrm{Im}(z) = b \in \mathbb{R}$

Proposition 1.4. Soit $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$
On a :

* $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$
* $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \times \overline{z_2}$
* $\overline{\overline{z}} = z$
* $\overline{z^n} = \overline{z}^n$
* On a $z_1 \in \mathbb{R} \iff z_1 = \overline{z_1}$
* On a
$$\mathrm{Re}(z_1) = \frac{z_1 + \overline{z_1}}{2} \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}(z_1) = \frac{z_1 - \overline{z_1}}{2i}$$
* On a
$$\begin{cases} \mathrm{Re}(z_1 + z_2) = \mathrm{Re}(z_1) + \mathrm{Re}(z_2) \\ \forall t \in \mathbb{R}, \mathrm{Re}(tz_1) = t\,\mathrm{Re}(z_1) \end{cases}$$
* Et
$$\begin{cases} \mathrm{Im}(z_1 + z_2) = \mathrm{Im}(z_1) + \mathrm{Im}(z_2) \\ \forall t \in \mathbb{R}, \mathrm{Im}(tz_1) = t\,\mathrm{Im}(z_1) \end{cases}$$

(ℝ-linéarité de Re et Im)

Proposition 1.5. Soit $z \in \mathbb{C}$
LASSÉ (Les assertions suivantes sont équivalentes) :

(i) $\exists b \in \mathbb{R} : z = ib$

(ii) $\overline{z} = -z$

(iii) $\mathrm{Re}(z) = 0$

Quand elles sont vraies, on dit que z est imaginaire pur.

1.3 Module

Proposition 1.6. Soit $z \in \mathbb{C}$
Alors $z\overline{z} \in \mathbb{R}_+$ et on a $z\overline{z} = 0$ si et seulement si $z = 0$

Corollaire 1.7. Tout nombre complexe non nul a un inverse :
$\forall z \in \mathbb{C}^*, \exists w \in \mathbb{C} : zw = 0$

Corollaire 1.8. On a la règle du produit nul :
$\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}, z_1 z_2 = 0 \iff (z_1 = 0 \text{ ou } z_2 = 0)$
On dit aussi que $\mathbb{C}$ est intègre.

Proposition 1.9. Soit $z_1 \in \mathbb{C}$ et $z_2 \in \mathbb{C}^*$
Alors le conjugué de $\frac{z_1}{z_2}$ est $\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$

Définition 1.10. Soit $z \in \mathbb{C}$
Le module de z est $|z| = \sqrt{z\overline{z}}$

Définition 1.11. On note $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ le cercle unité (ou trigonométrique)

Proposition 1.12. Soit $z_1 \in \mathbb{C}$ et $z_2 \in \mathbb{C}$
On a $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$ et si $z_2 \neq 0$, $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$

1.4 Inégalité triangulaire

Proposition 1.13. Soit $z, w \in \mathbb{C}$
LASSÉ :

(i) $\overline{z}w \in \mathbb{R}_+$

(ii) $z = 0$ ou ($z \neq 0$ et $\frac{w}{z} \in \mathbb{R}_+$)

(iii) $\exists u \in \mathbb{C}, \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}_+ : \begin{cases} z = \lambda u \\ w = \mu u \end{cases}$

Si ces assertions sont vraies, on dit que z et w sont positivement colinéaires.

Remarque : Si $z = a + ib$ et $w = c + id$, $\mathrm{Re}(\overline{z}w) = ac + bd$ est le produit scalaire de $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$

Théorème 1.14. Soit $z, w \in \mathbb{C}$

* On a $\mathrm{Re}(z) \leq |z|$
  Il y a égalité si et seulement si $z \in \mathbb{R}_+$
* Inégalité de Cauchy-Schwarz : On a $\mathrm{Re}(\overline{z}w) \leq |z| \cdot |w|$
  "Le produit scalaire est inférieure au produit des normes".
* Inégalité triangulaire : $|z + w| \leq |z| + |w|$
  Dans les deux derniers cas, il y a égalité si et seulement si z et w sont positivement colinéaires.

Corollaire 1.15. Pour tous $z_1, ..., z_n \in \mathbb{C}$, on a :

$$|z_1 + ... + z_n| \leq |z_1| + ... + |z_n|$$

Corollaire 1.16 (Inégalité triangulaire "à l'envers")**.** Pour tous $z, w \in \mathbb{C}$, on a :

$$|z + w| \geq |z| - |w|$$

Encore mieux : $|z + w| \geq ||z| - |w||$

1.5 Distance

Si A et B sont deux points d'affixes z_A et z_B, la distance entre A et B est $d(A, B) = \|\vec{AB}\| = |z_B - z_A|$
On la notera aussi $d(z_A, z_B)$

Proposition 1.17 (Inégalité triangulaire)**.** Soit $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$
Alors $d(z_1, z_3) \leq d(z_1, z_2) + d(z_2, z_3)$

Définition 1.18. Soit $z \in \mathbb{C}$ est $r \in \mathbb{R}_+^*$.
On définit :

* Le <u>cercle</u> de centre z et de rayon r :
  $\Gamma(z, r) = \{w \in \mathbb{C} \mid |z - w| = r\} = \left\{w \in \mathbb{C} \mid |z - w|^2 = r^2\right\}$
* Le <u>disque</u> (fermé) de centre z et de rayon r :
  $\Delta(z, r) = \{w \in \mathbb{C} \mid |z - w| \leq r\} = \left\{w \in \mathbb{C} \mid |z - w|^2 \leq r^2\right\}$

2 Équation du second degré

2.1 Racines carrés d'un nombre complexe : résultat théorique

Théorème 2.1 (provisoirement admis)**.** Soit $\Delta \in \mathbb{C}^*$
Alors il existe deux <u>racines carrés</u> de Δ, càd deux nombres complexes dont le carré vaut Δ.
Ces deux carrés sont opposés l'une de l'autre.

2.2 Racines carrés d'un nombre complexe : calcul en forme algébrique

Définition 2.2. On définit la fonction signe

$$\text{sgn} : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} 1 \text{ si } x > 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \\ -1 \text{ si } x < 0 \end{cases} \end{cases}$$

Théorème 2.3. Soit $\Delta \in \mathbb{C}$ et $z = x + iy$ un nombre complexe sous forme algébrique.
On a alors :

$$z^2 = \Delta \iff \begin{cases} \mathrm{Re}(z^2) = \mathrm{Re}(\Delta) \\ |z^2| = |\Delta| \\ \mathrm{sgn}(\mathrm{Im}(z^2)) = \mathrm{sgn}(\mathrm{Im}(\Delta)) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x^2 - y^2 = \mathrm{Re}(\Delta) \\ x^2 + y^2 = |\Delta| \\ \mathrm{sgn}(xy) = \mathrm{sgn}(\mathrm{Im}(\Delta)) \end{cases}$$

2.3 Résolution de l'équation générale

Théorème 2.4. Soit $a \in \mathbb{C}^*$, $b, c \in \mathbb{C}$
On considère l'équation $az^2 + bz + c = 0$ (E)
Soit $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant de (E)

* Si $\Delta = 0$: (E) a une unique solution :

$$-\frac{b}{2a}$$

* Si $\Delta \neq 0$: (E) a deux solutions :

$$\frac{-b-\delta}{2a} \quad \text{et} \quad \frac{-b+\delta}{2a}$$

  où δ est une racine de Δ

2.4 Relation coefficient-racines

Théorème 2.5. Soit $a \in \mathbb{C}^*$, $b, c \in \mathbb{C}$. On note z_1 et z_2 les solutions de $ax^2 + bx + c = 0$ (s'il n'y en a qu'une, notée ζ, on pose $z_1 = z_2 = \zeta$)

* On a $\forall z \in \mathbb{C}$

$$az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2)$$

* Relation coefficients-racines (formules de Viète)

$$z_1 + z_2 = -\frac{b}{a} \quad \text{et} \quad z_1 z_2 = \frac{c}{a}$$

2.5 Système somme-produit

Théorème 2.6. Soit $S, P \in \mathbb{C}$
On considère le système (Σ) : $\begin{cases} x + y = S \\ xy = P \end{cases}$ d'inconnue $(x, y) \in \mathbb{C}^2$
On considère l'équation associée $z^2 - Sz + P = 0$ (ÉA), d'inconnue $z \in \mathbb{C}$
On note z_1 et z_2 les solutions de (ÉA) (en posant $z_1 = z_2 = \zeta$ s'il n'y en a qu'une).
Alors les solutions de (Σ) sont (z_1, z_2) et (z_2, z_1)

3 Exponentielle complexe

3.1 Préliminaires : congruence modulo T

Définition 3.1. Soit $T \in \mathbb{C}^*$
On dit que z_1 et $z_2 \in \mathbb{C}$ sont congrus modulo T si $\exists k \in \mathbb{Z} : z_2 - z_1 = kT$
Si c'est la cas, on note $z_1 \equiv z_2 \pmod{T}$

Proposition 3.2. Soit $T \in \mathbb{C}^*$
La congruence modulo T est une relation d'équivalence.

* Elle est réflexive : $\forall z \in \mathbb{C}, z \equiv z \pmod T$
* Elle est symétrique : $\forall z, z' \in \mathbb{C}, z \equiv z' (\text{mod } T) \implies z' \equiv z (\text{mod } T)$
* Elle est transitive : $\forall z, z', z'' \in \mathbb{C}, (z \equiv z' (\text{mod } T) \text{ et } z' \equiv z'' (\text{mod } T)) \implies z \equiv z'' (\text{mod } T)$

Proposition 3.3. Soit $T \in \mathbb{C}^*$

* Soit $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$
  Si $\begin{cases} z_1 \equiv z_2 (\text{mod } T) \\ z_3 \equiv z_4 (\text{mod } T) \end{cases}$ on a $z_1 + z_3 \equiv z_2 + z_4 (\text{mod } T)$
* Soit $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ et $\lambda \in \mathbb{C}^*$
  Si $z_1 \equiv z_2 (\text{mod } T)$ alors $\lambda z_1 \equiv \lambda z_2 (\text{mod } \lambda T)$

3.2 Exponentielle complexe

Théorème 3.4 (provisoirement admis). Il existe une fonction $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ vérifiant :

(i) $\exp(0) = 1$

(ii) Propriété fondamentale : $\forall x, y \in \mathbb{C}, \exp(x + y) = \exp(x) \exp(y)$

(iii) On a $\forall z \in \mathbb{C}, \exp(\overline{z}) = \overline{\exp(z)}$

(iv) $\forall z \in \mathbb{C}, \frac{\exp(tz)-1}{t} \xrightarrow[t \to 0]{} z$

(v) Tout $w \in \mathbb{C}^*$ s'écrit $w = \exp(z)$ pour un certain $z \in \mathbb{C}$

(vi) Pour tous $z, z' \in \mathbb{C}$, on a $\exp(z) = \exp(z') \iff z \equiv z' (\text{mod } 2i\pi)$

Remarque : À la fin de l'année, on définira l'exponentielle de z comme

$$\exp(z) = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!}$$

Définition 3.5. On définit les fonctions

$$\cos : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ \theta \mapsto \text{Re}(e^{i\theta}) \end{cases} \qquad \sin : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ \theta \mapsto \text{Im}(e^{i\theta}) \end{cases}$$

Proposition 3.6. Soit $z \in \mathbb{C}$
On a : $|e^z| = e^{\text{Re}(z)}$

3.3 $\mathbb{U}$ et exponentielle

Théorème 3.7.

* Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a $e^{i\theta} \in \mathbb{U}$
* Pour tout $z \in \mathbb{U}$, on peut trouver $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $z = e^{i\theta}$
* Pour tout $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$, on a $e^{i\theta} = e^{i\theta'} \iff \theta \equiv \theta' \pmod{2\pi}$

Théorème 3.8 (Formules d'Euler). Soit $\theta \in \mathbb{R}$
On a

$$\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \text{et} \quad \sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

Proposition 3.9 (Formules de De Moivre). Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$
On a

$$(\cos(\theta) + i \sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$$

Proposition 3.10 (Factorisation par l'arc moitié)**.** Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$
On a
$$e^{i\alpha} + e^{i\beta} = e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}} \left(e^{i\frac{\alpha-\beta}{2}} + e^{i\frac{\beta-\alpha}{2}}\right) = 2\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}$$
Et
$$e^{i\alpha} - e^{i\beta} = e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}} \left(e^{i\frac{\alpha-\beta}{2}} - e^{i\frac{\beta-\alpha}{2}}\right) = 2i\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}$$

3.4 Arguments d'un nombre complexe

Proposition 3.11.

* Soit $z \in \mathbb{C}$
  On peut trouver $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $z = |z|e^{i\theta}$
* Pour tous $r, r' \in \mathbb{R}_+^*$ et tous $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$, on a $re^{i\theta} = r'e^{i\theta'} \iff \begin{cases} r = r' \\ \theta \equiv \theta' (\mathrm{mod}\ 2\pi) \end{cases}$

Définition 3.12. Soit $z \in \mathbb{C}^*$

* Tout nombre $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $z = |z|e^{i\theta}$ est un argument de z
* On appelle argument principal de z et on note $\arg(z)$ l'unique argument de z qui appartient à $]-\pi, \pi[$
* On appelle forme exponentielle de z toute écriture de la forme $z = |z|e^{i\theta}$, où θ est un argument de z

Proposition 3.13. Soit $z_1, z_2 \in \mathbb{C}^*$
On a :

* $\arg(z_1 z_2) \equiv \arg(z_1) + \arg(z_2) \pmod{2\pi}$
* $\forall n \in \mathbb{Z}, \arg(z_1^n) \equiv n \arg(z_1) \pmod{2\pi}$
* $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) \equiv \arg(z_1) - \arg(z_2) \pmod{2\pi}$

4 Compléments de trigonométrie

4.1 Valeurs

Proposition 4.1.

* Soit $\theta \in \mathbb{R}$
  On a
  $$\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$$
* Soit $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a^2 + b^2 = 1$
  Alors on peut trouver $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\begin{cases} a = \cos(\theta) \\ b = \sin(\theta) \end{cases}$

4.2 Périodicité et (im)parité

Proposition 4.2.

* cos est 2π-périodique et paire.
* sin est 2π-périodique et impaire.

Proposition 4.3. Soit $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$ tels que $\begin{cases} \cos(\theta_1) = \cos(\theta_2) \\ \sin(\theta_1) = \sin(\theta_2) \end{cases}$
Alors $\theta_1 \equiv \theta_2 \pmod{2\pi}$

4.3 Formules d'addition

Proposition 4.4. Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$
On a :

$$\begin{aligned}
\cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \\
\sin(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta \\
\cos(\alpha-\beta) &= \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta \\
\sin(\alpha-\beta) &= -\cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta
\end{aligned}$$

Corollaire 4.5. Soit $\theta \in \mathbb{R}$
On a :

$$\begin{aligned}
\cos(\theta+\pi) &= -\cos(\theta) & \sin(\theta+\pi) &= -\sin(\theta) \\
\cos(\pi-\theta) &= -\cos(\theta) & \sin(\pi-\theta) &= \sin(\theta) \\
\cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right) &= -\sin(\theta) & \sin\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right) &= \cos(\theta) \\
\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) &= \sin(\theta) & \sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) &= \cos(\theta)
\end{aligned}$$

Proposition 4.6. Soit $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$
On a :

$$\begin{aligned}
\cos(\theta_1) = \cos(\theta_2) &\iff \theta_1 \equiv \theta_2 (\text{mod } 2\pi) \text{ ou } \theta_1 \equiv -\theta_2 (\text{mod } 2\pi) \\
\sin(\theta_1) = \sin(\theta_2) &\iff \theta_1 \equiv \theta_2 (\text{mod } 2\pi) \text{ ou } \theta_1 \equiv \pi - \theta_2 (\text{mod } 2\pi)
\end{aligned}$$

Corollaire 4.7 (de formules d'addition)**.** Soit $\theta \in \mathbb{R}$
On a :

$$\begin{aligned}
cos(2\theta) &= \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) \\
&= 2\cos^2(\theta) - 1 \\
&= 1 - 2\sin^2(\theta) \\
\sin(2\theta) &= 2\cos(\theta)\sin(\theta)
\end{aligned}$$

4.4 Transformation produit → somme (linéarisation)

Proposition 4.8. Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$
On a :

$$\begin{aligned}
\cos(\alpha)\cos(\beta) &= \frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)) \\
\sin(\alpha)\sin(\beta) &= \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)) \\
\sin(\alpha)\cos(\beta) &= \frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta))
\end{aligned}$$

Remarque : On peut vouloir "délinéariser" une expression.
La clef est la formule de De Moivre.
Par exemple, $\cos(3t) + i\sin(3t) = (\cos(t) + i\sin(t))^3$
On développe l'expression et on prend partie réelle / imaginaire.

4.5 Transformation somme → produit (factorisation)

Proposition 4.9. Soit $p, q \in \mathbb{R}$
On a :

$$\cos(p) + \cos(q) = 2\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)$$
$$\sin(p) + \sin(q) = 2\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)$$

Exemple de calcul important : Soit $t \in \mathbb{R}$
Calculons $\sum\limits_{k=0}^{n} \cos(kt)$ et $\sum\limits_{k=0}^{n} \sin(kt)$
Si $e^{it} = 1$, on a $\sum\limits_{k=0}^{n} \cos(kt) = \sum\limits_{k=0}^{n} 1 = n+1$ et $\sum\limits_{k=0}^{n} \sin(kt) = \sum\limits_{k=0}^{n} 0 = 0$
Si $e^{it} \neq 1$ on va calculer

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} e^{ikt} &= \frac{e^{i(n+1)t} - 1}{e^{it} - 1} \\ &= \frac{e^{i\frac{n+1}{2}t}\left(e^{i\frac{n+1}{2}t} - e^{-i\frac{n+1}{2}t}\right)}{e^{i\frac{t}{2}}\left(e^{i\frac{t}{2}} - e^{-i\frac{t}{2}}\right)} \\ &= e^{i\frac{n}{2}t}\frac{2i\sin\left(\frac{n+1}{2}t\right)}{2i\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \\ &= e^{i\frac{n}{2}t}\frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\end{aligned}$$

On a donc

$$\sum_{k=0}^{n} \cos(kt) = \mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n} e^{ikt}\right) = \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\cos\left(\frac{n}{2}t\right)$$

Et

$$\sum_{k=0}^{n} \sin(kt) = \mathrm{Im}\left(\sum_{k=0}^{n} e^{ikt}\right) = \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\sin\left(\frac{n}{2}t\right)$$

4.6 Déphasage

Proposition 4.10. Soit $u, v \in \mathbb{R}$ non tous les deux nuls (càd $(u, v) \neq (0, 0)$)
On écrit le nombre complexe $u + iv$ sous forme exponentielle.
On a $u + iv = Ae^{i\psi}$, où $A = \sqrt{u^2 + v^2}$ et $\psi \in \mathbb{R}$ est un argument de $u + iv$
On a alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $u\cos(x) + v\sin(x) = A\cos(x - \psi)$

5 Cyclotomie

Définition 5.1. Soit $n \in \mathbb{N}$

* Un nombre $z \in \mathbb{C}$ est une racine n-ième de l'unité si $z^n = 1$
* L'ensemble des racines n-ièmes de l'unité est noté $\mathbb{U}_n$

Théorème 5.2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ On a

$$\mathbb{U}_n = \left\{e^{i2\pi\frac{k}{n}} \mid k \in \mathbb{Z}\right\} = \left\{e^{i2\pi\frac{k}{n}} \mid k \in [\![0, n-1]\!]\right\}$$

5.1 Équations $z^n = a$

Théorème 5.3. Soit $a \in \mathbb{C}^*$, que l'on écrit sous forme exponentielle $a = |a|e^{i\theta}$

* Alors $\sqrt[n]{|a|}e^{i\frac{\theta}{n}}$ est une solution de $z^n = a$
* Si z_0 est une solution de $z^n = a$, l'ensemble des solutions est

$$\{z_0\omega \mid \omega \in \mathbb{U}_n\} = \left\{z_0 e^{i2\pi\frac{k}{n}} \mid k \in [\![0, n-1]\!]\right\}$$

5.2 Somme

Proposition 5.4. Soit $n \geq 2$
Alors la somme des racines n-ièmes de l'unité est nulle.

$$\sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} \omega = 0$$

6 Géométrie plane

6.1 Rappels sur les angles

Étant donné trois points O, A, B du plan tels que $O \neq A$ et $O \neq B$, on dispose de l'angle géométrique $\widehat{AOB}$ entre les demi-droites $[OA)$ et $[OB)$. C'est un élément de $[0, \pi]$
Deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ du plan définissent un angle oriente $(\vec{u}, \vec{v})$
Sa mesure principale appartient à $]-\pi, \pi]$
On la notera simplement $(\vec{u}, \vec{v})$

Proposition 6.1. Soit $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ trois vecteurs non nuls du plan.
On a :

* Antisymétrie : $(\vec{v}, \vec{u}) \equiv -(\vec{u}, \vec{v}) \pmod{2\pi}$
* Relation de Chasles : $(\vec{u}, \vec{w}) \equiv (\vec{u}, \vec{v}) + (\vec{v}, \vec{w}) \pmod{2\pi}$

6.2 Angles et arguments

Dans toute la suite, on notera $\vec{Z}, \vec{W}$, etc... les vecteurs d'affixe z, w, etc...
On notera $\vec{H}$ le vecteur(horizontal) d'affixe 1

Point-clef : "L'angle" $(\vec{H}, \vec{Z})$ est "l'argument" de z
Plus précisement, toute mesure de $(\vec{H}, \vec{Z})$ est un argument de z

Proposition 6.2.

* Soit $z, w \in \mathbb{C}^*$
  On a $(\vec{Z}, \vec{W}) \equiv \arg\left(\frac{w}{z}\right) \pmod{2\pi}$
* Soit A, B, C trois points distincts, d'affixes a, b, c
  Alors $(\vec{AB}, \vec{AC}) \equiv \arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) \pmod{2\pi}$

Corollaire 6.3. Soit $z, w \in \mathbb{C}^*$

* Critère de colinéarité :
  — On a $\vec{Z}$ et $\vec{W}$ colinéaires ssi $\frac{w}{z}$ est réel.
  — Soit A, B, C trois points distincts.
  Alors A, B, C sont alignés ssi $\frac{c-a}{b-a}$ est un réel.
* Critère d'orthogonalité : Soit $z, w \in \mathbb{C}^*$
  Alors $\vec{Z}$ et $\vec{W}$ sont orthogonaux ssi $\frac{w}{z}$ est imaginaire pur.

6.3 Similitudes directes : définition et classification

Définition 6.4.

- ∗ On appelle similitude directe toute application de la forme

$$f_{a,b} : \begin{cases} \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ z \mapsto az + b \end{cases}$$

  où $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$
- ∗ On dit que a est le rapport de la similitude $f_{a,b}$
- ∗ On note $sim_+(\mathbb{C})$ l'ensemble des similitudes directes.

Théorème 6.5. Soit $a \in \mathbb{C}^*$ que l'on écrit $a = |a|e^{i\theta}$ pour un certain $\theta \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{C}$

- ∗ Si $a = 1$, $f_{a,b}$ est la translation de vecteur b
- ∗ Si $a \neq b$, $f_{a,b}$ a un unique point fixe $w = \frac{b}{1-a}$ et :
  - — $\forall z \in \mathbb{C}, f_{a,b}(z) - w = a(z - w)$
  - — On peut obtenir $f_{a,b}$ en composant l'homothétie de centre w et de rapport $|a|$ et la rotation de centre w et d'angle θ

Remarque : Si $a \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, on dit que $f_{a,b}$ est une homothétie de centre w et de rapport a

Remarque : Deux similitudes de même centre w commutent.

Proposition 6.6. Soit $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$

- ∗ $f_{a,b}$ "dilate les distances d'un facteur $|a|$"

$$\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}, \left|f_{a,b}(z_2) - f_{a,b}(z_1)\right| = |a||z_2 - z_1|$$

- ∗ $f_{a,b}$ "préserve les angles" : pour tous $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ distincts, on a

$$\arg\left(\frac{f_{a,b}(z_3) - f_{a,b}(z_1)}{f_{a,b}(z_2) - f_{a,b}(z_1)}\right) \equiv \arg\left(\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}\right) \pmod{2\pi}$$

6.4 Structure de $sim_+(\mathbb{C})$

Proposition 6.7 ($sim_+(\mathbb{C})$ est un groupe)**.**

- ∗ $sim_+(\mathbb{C})$ est stable par composition : $\forall f, g \in sim_+(\mathbb{C}), g \circ f \in sim_+(\mathbb{C})$
- ∗ Tout $f \in sim_+(\mathbb{C})$ est bijectif, et on a $f^{-1} \in sim_+(\mathbb{C})$

Proposition 6.8 ($sim_+(\mathbb{C})$ agit exactement 2-transitivement sur $\mathbb{C}$)**.** Soit $z_1 \neq z_2$ et $w_1 \neq w_2 \in \mathbb{C}$
Alors il existe un unique $f \in sim_+(\mathbb{C})$ tel que $f(z_1) = w_1$ et $f(z_2) = w_2$